SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. Citti

PRINCIPIO DI CONCENTRAZIONE DI COMPATTEZZA ED EQUAZIONI ELLITTICHE QUASILINEARI

22 Febbraio 1990

1. PRINCIPIO DI CONCENTRAZIONE DI COMPATTEZZA

Il principio di concentrazione di compattezza, è stato introdotto da P.L. Lions, che ha applicato allo studio delle equazioni ellittiche uno strumento noto da tempo in probabilità ([L1], [L2]). L'idea centrale della dimostrazione è l'osservazione che, se (p_k) è una successione di funzioni nonnegative, limitata in L^1, lo studio della funzione di concentrazione

$$Q_k(R) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{B(y,R)} p_k \, dx$$

consente di determinarne le proprietà di compattezza. Nella sua formulazione più generale questo teorema fornisce una classificazione completa delle successioni limitate in L^1, e si può enunciare nel modo seguente:

Teorema 1. *Sia* (p_k) *è una successione di funzioni misurabili nonnegative in* $\mathbf{R}^n$ *tali che*

$$\int_{R^n} p_k(x)\, dx \to \lambda \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Allora da (p_k) *si può estrarre una sottosuccessione, che indichiamo ancora*

con (p_k), *e che verifica una delle condizioni seguenti:*

Concentrazione. Per ogni $k \in N$ esiste $y_k \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R>0 \ , \ \exists \bar{k} \in N \ \left| \int_{B(y_k,R)} p_k(x)\, dx - \lambda \right| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{k} \, ;$$

Se la successione (y_k) è limitata si dice che vale la concentrazione al finito, se non è limitata vale la concentrazione all'infinito.

Annullamento

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{B(y,R)} p_k(x)\, dx \right) = 0 \quad \forall R > 0;$$

Dicotomia. Esiste $\mu \in \,]0,\lambda[$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{k} \in \mathbf{N}$, (y_k) succ in $\mathbf{R}^n$, $R>0$, (R_k) successione in $\mathbf{R}^+$ e p_k^1, p_k^2 misurabili, non negative e tali che per ogni $k > \bar{k}$

$$\|p_k - (p_k^1 + p_k^2)\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon \ ;$$

$$\left| \int_{B(y_k,R)} p_k^1 \, dx - \mu \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(y_k,R_k)} p_k^2 \, dx - (\lambda - \mu) \right| < \varepsilon$$

e $R_k \to +\infty$ per $k \to \infty$.

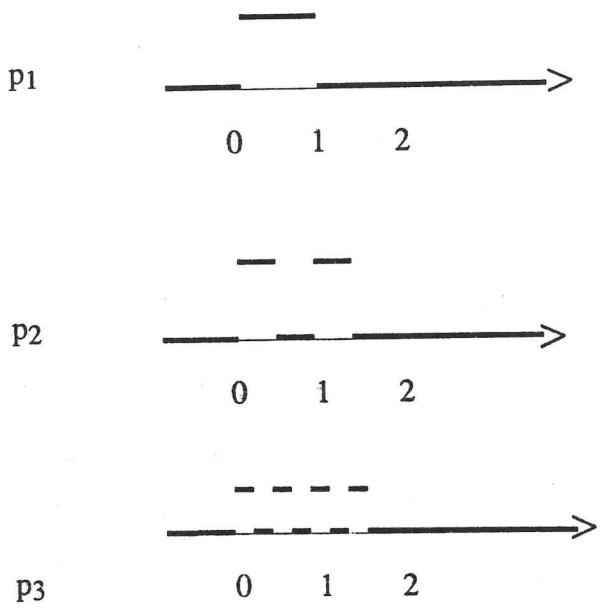
In realtà nelle applicazioni si hanno spesso ulteriori ipotesi su (p_k), oltre alla limitatezza, e, studiando direttamente la successione (Q_k), si ottengono delle formulazioni semplificate e più mirate del teorema. Non vogliamo perciò entrare nel dettaglio della prova in questa generalità, ma ci limitiamo a dare un'idea intuitiva del significato di questa classificazione.

Se esiste p in L^1 tale che

$p_k \to p$ in norma,

allora è immediato verificare che vale la concentrazione al finito, ma questa condizione è verificata per esempio anche da una successione convergente debolmente in L^1, e non in norma, di cui tutti gli elementi hanno il supporto nello stesso insieme. Un possibile esempio è:

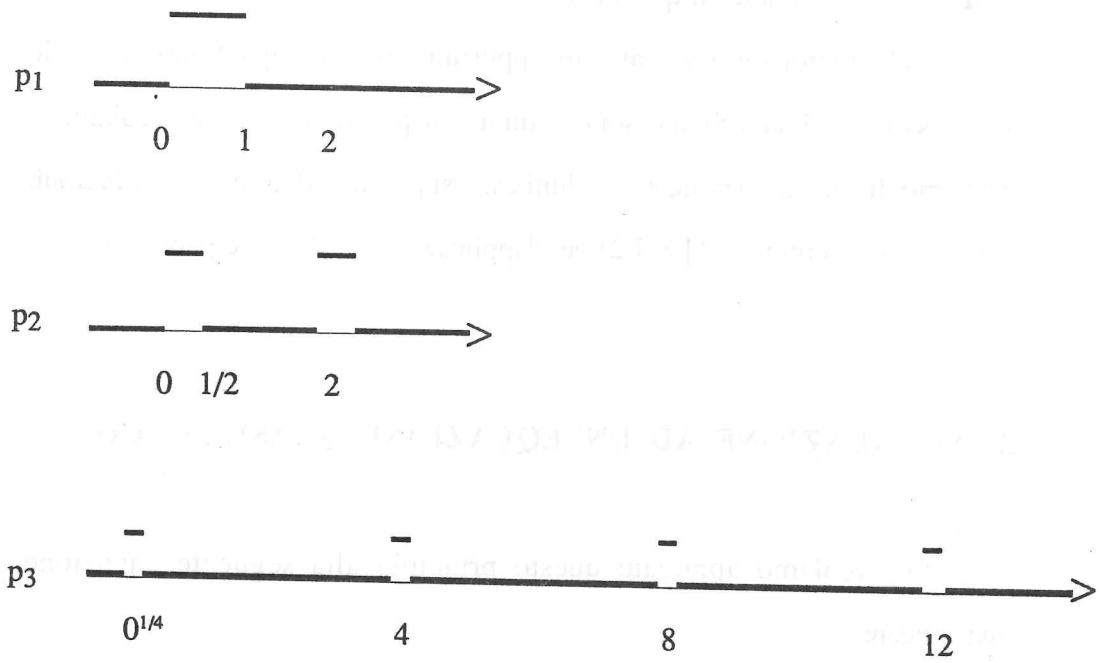
$$p_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad p_k = \begin{cases} 1 \text{ se } \dfrac{2j}{2^k} \le x \le \dfrac{2j+1}{2^k}, & j = 0..2^k - 1 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$



Se (p_k) verifica la concentrazione al finito, e (y_k) è una successione in $\mathbf{R}^n$ tale che $|y_k| \to +\infty$, allora la successione $p_k(\bullet - y_k)$ verifica la condizione di concentrazione all'infinito.

Anche l'annullamento non implica in generale la convergenza a 0, come prova il seguente esempio:

$$p_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad p_k = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad kj \le x \le kj + \dfrac{1}{2k}, & j = 0..h-1 \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$



Infine, se vale la dicotomia la successione si spezza nella somma di due termini: gli esempi più semplici di dicotomia sono:

$$p_k = p + q(\cdot - y_k)\ , \text{ dove } |y_k| \to +\infty \text{ per } k \to +\infty\ ,$$

$$p_k = p(\cdot - x_k) + q(\cdot - y_k)\ , \text{ dove } |x_k|\ , |y_k| \to +\infty \text{ per } k \to +\infty\ ,$$

Questo principio si può applicare anche a successioni limitate in $L^p(\mathbf{R}^n)$, o in $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, scegliendo $p_k = |u_k|^p$ o, rispettivamente $p_k = |u_k|^p + |Du_k|^p$. E' chiaro allora l'interesse di questo principio nella soluzione di equazioni

differenziali in forma di divergenza. Infatti il problema di determinare soluzioni di equazioni di questo tipo si può ricondurre alla ricerca di punti critici del funzionale associato, in opportuni spazi di tipo Sobolev. Se le successioni di Palais Smale sono limitate, si possono studiare mediante il principio di concentrazione e, in taluni casi, si possono determinare soluzioni. (Si veda per esempio [L1] e [L2] per l'applicazione a diverse equazioni).

2. APPLICAZIONE AD UN' EQUAZIONE QUASILINEARE

Noi abbiamo applicato questo principio alla seguente equazione quasilineare:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div}(a(|Du|)Du) - a(|u|)u + g(x)f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n ,$$

dove a è continua, nonnegativa e verifica una condizione di crescita "tipo potenza".

Il modello di questa equazione è il seguente:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) - |u|^{p-2}u + g(x)\, |u|^{q-2}u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n,$$

con $1<p<n$, che, nel caso in cui $p = 2$, si scrive:

$$(3) \qquad \Delta u - u + g(x)\, |u|^{q-2} u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n .$$

Quest'ultima è stata diffusamente studiata. A causa della nonlimitatezza del dominio l'immersione di Sobolev non è in generale compatta. Se g è costante si può lavorare in spazi di funzioni radialmente simmetriche, e sfruttare la compattezza della restrizione dell'immersione di Sobolev a questi spazi, per determinare punti critici del funzionale associato. (cf. [S], [BL] e [C1] per l'equazione (2)).

Se g non è costante, (3) può non avere soluzione. Questo accade ad esempio se g dipende soltanto da una componente, ed è strettamente crescente (cf. [N], [EL]). Ma se esiste

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) = g_\infty ,$$

allora si può utilizzare il principio di concentrazione di compattezza, e un metodo di confronto fra l'equazione (3) e l'equazione all'infinito associata

$$(4) \qquad \Delta u - u + g_\infty\, |u|^{q-2} u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n.$$

Queste tecniche permettono di determinare soluzioni sotto opportune ipotesi su g, ad esempio se $g_\infty = \inf_{\mathbf{R}^n} g$. (cf. [DN], [L2], [L] per (3) e [C2] per (2)).

Con tecniche analoghe P.L. Lions [L2], [L3], Benci e Cerami [Bc], Bahri e Lions [BL] hanno dimostrato un teorema di rappresentazione per le successioni di Palais-Smale di (3), che consente di determinare soluzioni sotto ipotesi meno restrittive. Noi abbiamo esteso il teorema di rappresentazione anche alle successioni di Palais Smale di (1).

Formuliamo le seguenti ipotesi.

a sia continua, nonnegativa e verifichi la condizione

$$\exists p > 1,\ 0<\alpha<1 \text{ tale che } p-\alpha > 1,\ p<(p-\alpha)^* = \frac{n(p-\alpha)}{n-(p-\alpha)}, \text{ e}$$

$$\frac{a(t)}{t^{p-2}} \text{ è noncrescente, } \frac{a(t)}{t^{p-2-\alpha}} \text{ è nondecrescente.}$$

Se definiamo $A(t) = \int_0^1 sa(s)ds$, A induce su $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ la norma

$$\|u\| = \inf\left\{k > 0 : \int A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right) dx \leq 1\right\},$$

e la chiusura di $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ con $\|u\| = \|u\|_{L^A} + \|Du\|_{L^A}$ si dice spazio di Orlicz Sobolev generato da A, e si indica H^A. Denotiamo allora A^* la funzione di Sobolev-Orlicz associata ad A.

Supponiamo che $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sia continua nonnegativa e verifichi

$$f(t)/A^*(t) \to 0 \text{ per } t \to +\infty$$

$$\exists r \text{ tale che } p<r<(p-\alpha)^* \text{ e } \frac{f(t)}{t^{r-1}} \text{ è non decrescente.}$$

Supponiamo infine che gi sia continua, nonnegativa, e che esista

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = g_\infty.$$

Sotto queste ipotesi possiamo definire su H^A il funzionale

$$I(u) = \int_{\mathbf{R}^n} A(|Du|)dx + \int_{\mathbf{R}^n} B(|u|)dx - \int_{\mathbf{R}^n} g(x)F(u)dx$$

dove $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$. I suoi punti critici si dicono soluzioni deboli di (1).

Definiamo poi I_∞ il funzionale associato all'equazione all'infinito:

$$I_\infty(u) = \int_{\mathbf{R}^n} A(|Du|)dx + \int_{\mathbf{R}^n} B(|u|)dx - \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty F(u)dx$$

e siano $M = \{u \neq 0: dI(u)(u)=0\}$ e $M_\infty = \{u \neq 0: dI_\infty(u)(u) = 0\}$.

Osservazione 2. E' immediato osservare che tutti i punti critici di I appartengono ad M. Ricordiamo inoltre alcune proprietà di $I_{|M}$ (cf. [C3], [BaC]):

$$I(u) \geq \left(1 - \frac{p}{r}\right) \int_{\mathbf{R}^n} A(|Du|) + A(|u|) \quad \forall u \in M.$$

$\inf_M I > 0$, e $\inf_M I$ è un valore critico asintotico per I .

Se (u_k) è una successione in H^A tale che $I(u_k) \to \lambda$ e $dI(u_k) \to 0$, allora $\lambda > 0$.

Vale il seguente teorema di rappresentazione:

Teorema 3. *Sia* (u_k) *una successione in* H^A *tale che* $I(u_k) \to \lambda$ *e*

$dI(u_k) \to 0$ *per* $k \to +\infty$. *Allora esistono un numero* $m \in \mathbf{N}$, *e* m *successioni* (y_k^j) *in* $\mathbf{R}^n$, *tali che* $|y_k^j| \to +\infty$ *per* $k \to +\infty$,

$$u_k(x) = u^o(x) + \sum_{j=1}^{m} u^j(x-y_k^j) + \psi_k(x),$$

$$\lambda = I(u^o) + \sum_{j=1}^{m} I_\infty(u^j),$$

dove u^o *è soluzione di* $dI(u^o)=0$, u^j *di* $dI_\infty(u^j)=0$ $\forall\, j=1...m$, *e* $\psi_k \to 0$ *in* $H^A(\mathbf{R}^n)$ *per* $k \to +\infty$.

Questo teorema non assicura che u^o sia diversa da 0. Tuttavia se esiste una successione (u_k) in $H^A(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$dI(u_k) \to 0 \text{ e } I(u_k) \to \lambda,$$

e λ non può essere rappresentata nella forma $\sum_{j=1}^{m} I_\infty(u^j)$, con u^j soluzioni di $dI_\infty(u^j) = 0$, allora u^o deve essere necessariamente non nulla.

Una prima conseguenza del teorema di rappresentazione è il seguente:

Teorema 4. *Se* $\inf_M I < \inf_{M_\infty} I_\infty$, *allora* (1) *ha almeno una soluzione*

nonnegativa, che realizza il minimo di I *su* M.

Dimostrazione. Per l'osservazione esiste una succesione (u_k) tale che $I(u_k) \to \inf_M I$ per $k \to +\infty$, e $dI(u_k) \to 0$.Quindi

$$\inf_M I = I(u_0) = \sum_{j=1}^{m} I_\infty(u^j) \geq \text{(poiché } \inf_{M_\infty} I > 0)$$

$$\geq m \inf_{M_\infty} I_\infty > \text{(per ipotesi)}$$

$$> m \inf_M I.$$

allora $m = 0$, e $u_k = u_0 + o(1)$ per $k \to +\infty$.

L'ipotesi del teorema 4 è effettivamente verificata se $g_\infty = \inf_{\mathbf{R}^n} g$ (cf. [BaC]). D'altra parte, se $g_\infty = \sup_{\mathbf{R}^n} g$, si ha $\inf_M I = \inf_{M_\infty} I_\infty$ e di più il minimo di I su M non è raggiunto. (cf. [N]). Vedremo come si possano utilizzare metodi di topologia algebrica e il teorema di rappresentazione, per determinare soluzioni, imponendo ipotesi soltanto sul comportamento di g all'infinito, e non su tutto lo spazio.

3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

Per evitare difficoltà di tipo tecnico, legate alla definizione della norma di Orlicz, diamo la dimostrazione nel caso particolare dell'equazione (2):

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) - |u|^{p-2}u + g(x)|u|^{q-2}u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n.$$

Le ipotesi che abbiamo formulato si riducono semplicemente a:

$$1 < p < n,\ p < q < \frac{np}{n-p},$$

lo spazio in cui cerchiamo soluzioni è $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, e il funzionale I si scrive nella forma:

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^n} |Du|^p\,dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^n} |u|^p\,dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\,|u|^q\,dx.$$

Ricordiamo il seguente lemma tecnico:

Lemma 5. *Per ogni* $\eta \in]0,1[$ *esiste* $L_\eta > 0$ *tale che, per ogni* $u, v \in \mathbf{R}^n$, *se* $|u-v| \geq \eta(|u| + |v|)$, *allora*

$$(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)\cdot(u-v) \geq L_\eta\, |u-v|^p .$$

Lemma 6. *Sia* (u_k) *una successione in* $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ *tale che* $u_k \to u$ *debolmente e* $dI(u_k) \to 0$, *allora da* (u_k) *si può estrarre una sottosuccessione, che indichiamo ancora* (u_k), *tale che*

$$u_k \to u \ \textit{in}\ H^{1,p}_{loc}(\mathbf{R}^n).$$

Dimostrazione. Per il teorema di immersione di Sobolev, dobbiamo soltanto provare che $Du_k \to Du$ in $L^p_{loc}(\mathbf{R}^n)$.

Per $\eta > 0$ denotiamo $A_{\eta k} = \{x \in B(0,R) : |Du - Du_k| \geq \eta(|Du| + |Du_k|)\}$. Allora

$$\int_{B(0,R)\setminus A_{\eta m}} |Du-Du_k|^p \leq C\eta^p \left(\int_{\mathbf{R}^n} |Du|^p + \int_{\mathbf{R}^n} |Du_k|^p \right) \to 0$$

per $\eta \to 0$ uniformemente rispetto a k, perché (u_k) è limitata. Ora indichiamo χ una funzione tale che $\chi \in C^\infty_0(B(0,2R))$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ su $B(0,R)$.

Dal lemma 5 segue che

$$\int_{A_{\eta m}} ;;) \ |Du-Du_k|^p \leq C \int_{A_{\eta m}} \left(|Du|^{p-2}Du - |Du_k|^{p-2}Du_k\right) \cdot (Du-Du_k) \leq$$

$$\leq C \int_{B(0,2R)} \left(|Du|^{p-2} Du - |Du_k|^{p-2} Du_k\right) \cdot D(u-u_k)\, \chi \leq$$

$$\leq C \int_{B(0,2R)} |Du|^{p-2} Du \cdot D(u-u_k)\chi + \int_{B(0,2R)} |Du_k|^{p-2} Du_k$$

$$\cdot\, D\chi(u-u_k) - C \int_{B(0,2R)} |Du_k|^{p-2} Du_k \,.\, D((u-u_k)\chi).$$

Indichiamo rispettivamente questi tre termini T_1, T_2, T_3. $T_1(k) \to 0$ per $m \to +\infty$, poiché $u_k \to u$ debolmente in $H^{1,p}$, $T_2(k) \leq C\|u_k - u\|_{L^p(B(0,2R))} \to 0$ per $k \to +\infty$, per il teorema di immersione di Sobolev

$$T_3(k) = -C \int_{B(0,2R)} |Du|^{p-2} Du \cdot D((u-u_k)\chi) = -dI(u_k)((u-u_k)\chi) +$$

$$+ \int_{B(0,2R)} |u_k|^{p-2} u_k (u-u_k)\chi - \int_{B(0,2R)} |u_k|^{q-2} u_k (u-u_k)\chi$$

$$\to 0 \text{ per } k \to +\infty$$

perchè (u_k) è limitata, e $dI(u_k) \to 0$ per $k \to +\infty$.

Poiché vale questo lemma, non conviene applicare il teorema di concentrazione nella sua formulazione più generale, ma risulta più semplice studiare direttamente la proprietà di

$$Q_k(R) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{B(y,R)} |u_k|^p + |Du_k|^p \, dx.$$

Lemma 7. *Siano verificate le stesse ipotesi del lemma* 6 *e sia* $u=0$. *Poiché* $(Q_k(1))$ *è limitata non è restrittivo supporre che esista* $\lim_{k\to\infty} Q_k(1)$.

i) *se* $\lim_{k\to\infty} Q_k(1) = 0$, allora $u_k \to 0$ *in norma,*

ii) *se* $\lim_{k\to\infty} Q_k(1) \neq 0$, *esiste una successione* (y_k) *in* $\mathbf{R}^n$ *tale che* $|y_k| \to \infty$ e

$$\int_{B(y,1)} |u_k|^p + |Du_k|^p \, dx \geq \mu > 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che $Q_k(1) \to 0$ per $k\to\infty$. Indichiamo

con $\mathfrak{F}$ la famiglia delle palle di raggio 1, e centro di coordinate intere

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u_k|^q \leq \sum_{B\in\mathfrak{F}} \int_B |u_k|^q \, dx \leq (\text{se } \; q = p\theta+(1-\theta)p^*)$$

$$\leq C \sum_{B\in\mathfrak{F}} \left(\int_B |u_k|^p \, dx\right)^{\theta} \left(\int_B |u_k|^{p^*} dx\right)^{1-\theta} \leq$$

per la diseguaglianza di Sobolev

$$\leq C \sum_{B\in\mathfrak{F}} \left(\int_B |u_k|^p \, dx\right)^{\theta} \left(\int_B |Du_k|^p \, dx\right)^{p^*(1-\theta)/p} \leq$$

$$\leq C \sum_{B\in\mathfrak{F}} \left(\int_B |u_k|^p + |Du_k|^p\right)^{q/p} \leq$$

$$\leq C\, Q_k(1)^{q/p-1} \int_{\mathbf{R}^n} |u_k|^p + |Du_k|^p$$

Pertanto

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u_k|^p + |Du_k|^p = dI(u_k)(u_k) + \int_{\mathbf{R}^n} g(x)|u_k|^q \to 0 \quad \text{per}$$

$k \to \infty$, per le ipotesi fatte su (u_k).

ii) Se $Q_k(1) \to \mu > 0$, allora esiste una successione (y_k) in $\mathbf{R}^n$ tale che

$$\int_{B(y,1)} |u_k|^p + |Du_k|^p \, dx \geq \frac{\mu}{2} .$$

Dal lemma 6 segue che $|y_k| \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

Se invece $u \neq 0$, il lemma 6 suggerisce un modo "naturale", e particolarmente semplice di spezzare la successione u_k: è u stesso che gioca il ruolo di p_k^1 nella condizione di dicotomia, e u_k risulta spezzato nella sua "parte al finito", u; e nella parte all'infinito, u_k - u. Infatti,

Lemma 8. *Nelle stesse ipotesi del lemma* 6, *si ha*

i) $I(u_k) - I(u) - I(u_k-u) \to 0$ per $k \to +\infty$

ii) $dI(u) = 0$

iii) $dI(u_k-u) \to 0$ per $k \to +\infty$

Dimostrazione. Consideriamo un solo termine di quelli che compaiono in I, poiché gli altri si trattano in maniera analoga. Proviamo che:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Du_k|^p - \int_{\mathbf{R}^n} |Du_k - Du|^p - \int_{\mathbf{R}^n} |Du|^p \to 0.$$

Si ha:

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,R)} \left(|Du_k|^p - |Du_k - Du|^p - |Du|^p\right) \leq$$

$$\leq C \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,R)} |Du|^p + \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,R)} \int_0^1 |Du_k - tDu|^{p-1} |Du| \leq$$

$$\leq C \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,R)} |Du|^p + C_1 \left(\int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,R)} |Du|^p \right)^{1/p},$$

poiché (u_k) è limitata. Questo termine tende a 0 per $R \to +\infty$, uniformemente in $k \in \mathbf{N}$. D'altra parte l'integrale su $B(0,R)$ tende a 0 per $k \to \infty$, per il Lemma 6, e quindi i) è verificata.

ii) è conseguenza immediata del lemma 6.

Per provare iii) basta dimostrare che

$$|Du_k|^{p-1} - |Du|^{p-1} - |Du_k - Du|^{p-1} \to 0 \text{ in } L^{p/(p-1)},$$

$$|u_k|^{p-1} - |u|^{p-1} - |u_k - u|^{p-1} \to 0 \text{ in } L^{p/(p-1)},$$

$$|u_k|^{q-1} - |u|^{q-1} - |u_k - u|^{q-1} \to 0 \text{ in } L^{q/(q-1)},$$

e la prova è simile da quella del punto i).

Dimostrazione del teorema 3. Non è difficile riconoscere che la successione (u_k) è limitata, quindi possiamo supporre che (u_k) sia debolmente convergente in $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ ad una funzione u^o. Per il lemma 8 $dI(u^o) = 0$. Se definiamo $\psi_k^1(x) = u_k(x) - u^o(x)$, $\psi_k^1 \to 0$ debolmente in $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, e verifica

$$I_\infty(\psi_k^1) = I\,\psi_k^1 + o(1) = I(u_k) - I(u^o) + o(1) \text{ per } k \to +\infty$$

$$dI_\infty(\psi_k^1) = dI(\psi_k^1) + o(1) = o(1) \text{ per } k \to +\infty$$

Se $\psi_k^1 \to 0$ in $H^{1,p}$, abbiamo terminato, se ψ_k^1 non converge a 0 in norma, per il lemma 7 esiste $\mu > 0$ e una successione (y_k^1) in $\mathbf{R}^n$ tale che $|y_k^1| \to +\infty$ per $k \to +\infty$ e

$$\int_{B(y_k^1,1)} |D\psi_k^1|^p + |\psi_k^1|^p > \mu.$$

Allora ψ_k^1 $(\cdot+y_k^1)$ deve essere limite debole $u^1 \neq 0$ e, per il lemma 8, $dI_\infty(u^1)=0$.

Iterando questo procedimento otteniamo successioni u^j, y_k^j e ψ_k^j tali che u^j verifica $dI_\infty(u^j) = 0$ per ogni j, $y_k^j \to +\infty$ per $k \to +\infty$,

$$\psi_k^j(x) = \psi_k^{j-1}(x) - u_k^{j-1}(x-y_k^{j-1}) = u_k(x) - u^o(x) - \sum_{i=1}^{j} u^i(x-y_k^i)$$

$$dI_\infty(\psi_k^1) = o(1) \text{ per } k \to +\infty$$

Ora, poiché $\inf_M I > 0$, $\inf_{M_\infty} I_\infty > 0$ e $\lambda > 0$ (per l'osservazione 2), l'iterazione deve terminare in un numero finito di passi.

BIBLIOGRAFIA

[BaC] M. BADIALE and G. CITTI, *Concentration Compactness Principle and Quasilinear Elliptic Equations in* $\mathbf{R}^n$, Comm. in P.D.E. to appear.

[BL] A. BAHRI and P.L. LIONS, *On the Existence of a Positive Solution of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains,* to appear.

[BC] V. BENCI and G. CERAMI, *Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains*, Arch. Ration Mech. Anal., 99, 4 (1987), 283-300.

[BL] H. BERESTYCHI and P.L. LIONS, *Nonlinear Scalar Field Equations I, Existence of a Ground State,* Arch. Rational. Mech. Anal., 82 (1983), 313-346.

[C1] G. CITTI, *Positive Solutions for a Quasilinear Degenerate Elliptic Equation in* $\mathbf{R}^n$, Rend. Circ. Mat. Palermo, s. II, 35 (1986), 364-375.

[C2] G. CITTI, *Existence of Positive Solutions of Quasilinear Degenerate Equations on Unbounded Domains,* Ann. Mat. Pura Appl., 4, 158 (1990).

[C3] G. CITTI, *Soluzioni positive di equazioni quasilineari ellittiche degeneri su aperti non limitati in* $\mathbf{R}^n$, Seminario di Analisi Matematica del Dipartimento Matematico dell'Università di Bologna, Bologna 1988/89.

[DN] W.Y. DING and W.M. NI, *On the Existence of Positive Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation,* Arch. Rational Mech. Anal., 91, 4 (1986), 283-308.

[EL] M.J. ESTEBAN and P.L. LIONS, *Existence and non Existence Results for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains,* Proc. Royal Edinburgh Soc., 93 A (1982), 1-14.

[L] Y. LI, *Remarks on a Semilinear Elliptic Equation on* $\mathbf{R}^n$, J. Diff. Eq., 74 (1988), 34-49.

[L1] P.L. LIONS, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, part 1.*, Ann. I.H.P., Anal. non linéaire, v. 1, n. 2 (1984), 109-145.

[L2] P.L. LIONS, *The Concentration-Compactness Principle in the Calcu:us of Variations. The Locally Compact Case,* part. 2 . Ann. I.H.P. Anal non linéaire, v. 1, n. 4 (1984), 223-283.

[L3] P.L. LIONS, *On Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains,* in *Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States* (W.M.Ni, L.A. Peletier and J. Serrin, Eds.), Springer-Verlag, New York/Berlin 1988.

[N] W.M.NI, *Some Aspects of Semilinear Elliptic Equations in* $\mathbf{R}^n$, in *Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States* (W.M. Ni, L.A. Peletier and J. Serrin, Eds.), Springer-Verlag, New York/Berlin 1988.

[S] W. STRAUSS, *Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions,* Comm. Math. Phys., 55 (1977), 149-162.